数列求通项方法总结

一、累加法

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3\cdot 2^{2n-1}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

累加

$$a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$$

$$\begin{cases} a_2-a_1=3\cdot 2 \\ a_3-a_2=3\cdot 2^3 \\ a_4-a_3=3\cdot 2^5 \\ \cdots \\ a_n-a_{n-1}=3\cdot 2^{2n-3} \end{cases}$$

相加 $a_n-a_1=3(2^1+2^3+\cdots+2^{2n-3})=3\cdot\frac{2(1-4^{n-1})}{1-4}=2^{2n-1}-2.$

$\therefore a_n=2^{2n-1}$

构造常数列

$$a_{n+1}=a_n+3\cdot 2^{2n-1}$$

$$a_{n+1}=a_n+\boxed{2^{2n+1}-2^{2n-1}}$$

$$a_{n+1}-2^{2n+1}=a_n-2^{2n-1}$$ 公比为1

$\{a_n-2^{2n-1}\}$ 常数列 $\therefore a_n-2^{2n-1}=a_1-2^1=0.$

$a_n=2^{2n-1}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

累加.

$a_2-a_1=\ln 2.$

$a_3-a_2=\ln\frac{3}{2}$

$a_n-a_{n-1}=\ln\frac{n}{n-1}$

$a_n-a_1=\ln 2\cdot\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}=\ln n.$

$a_n=\ln n+2.$

构造

$a_{n+1}=a_n+\ln\frac{n+1}{n}=a_n+\ln(n+1)-\ln n$

$a_{n+1}-\ln(n+1)=a_n-\ln n.$

$\{a_n-\ln n\}$ 为常数列.

$a_n-\ln n=a_1-\ln 1=2.$

$\therefore a_n=\ln n+2.$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3n-1}{3n+2}a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

累乘法

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n-1}{3n+2}.$$

$$\begin{cases} \frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{5}. \\ \frac{a_3}{a_2}=\frac{5}{8}. \\ \vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3n-4}{3n-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{\cancel{5}}\times\cancel{\frac{5}{8}}\times\cdots\times\cancel{\frac{3n-4}{}}\frac{}{3n-1}=\frac{2}{3n-1}$

$\Rightarrow a_n=\frac{6}{3n-1}$

构造 $a_{n+1}=\frac{3n-1}{3n+2}a_n.$

$(3n+2)a_{n+1}=(3n-1)a_n$

$\{(3n-1)a_n\}$ 为常数列

$(3n-1)a_n=2a_1=6.$

$a_n=\frac{6}{3n-1}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$\boxed{\text{累乘}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{2}$$

$$\begin{cases}\frac{a_2}{a_1}=1\\ \frac{a_3}{a_2}=\frac{(\frac{3}{2})^2}{2}\\ \frac{a_4}{a_3}=\frac{(\frac{4}{3})^2}{2}\\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(\frac{n}{n-1})^2}{2}\end{cases}$$

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{2^{n-1}}\times\cancel{(\tfrac{2}{1})^2}\times\cancel{(\tfrac{3}{2})^2}\times\cancel{(\tfrac{4}{3})^2}\times\cdots\times\cancel{(\tfrac{n}{n-1})^2}$$

$$=\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

$$a_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

累乘

$$2a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{n^2}a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n^2}$$

$\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 等比 首项 $\frac{a_1}{1^2}=1$.

$q=\frac{1}{2}$　　$\frac{a_n}{n^2}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

12. (2023• 甲卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$2S_n=na_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

$n=1$ 时. $2a_1=a_1\Rightarrow a_1=0$.

(1) $\boxed{S_{n+1}-S_n=a_{n+1}}$

$$\begin{cases}2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}\\ 2S_n=na_n\end{cases}$$

$$2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n$$

$$(n-1)a_{n+1}=na_n$$

当 $n=1$ 时，$a_1\cdot n=0\Rightarrow a_1=0$. 符合题意.

当 $n\geq 2$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n-1}$

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1}$　　$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2}$

$\frac{a_5}{a_4}=\frac{4}{3}$　　$\frac{a_n}{a_2}=n-1$

$\vdots$

$\therefore a_n=n-1$　$n\in N^*$.

$\boxed{\text{构造}}$

$$(n-1)a_{n+1}=na_n.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_{n+1}}{n}$$

$\left\{\frac{a_n}{n-1}\right\}$ 常数列

$$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_2}{2-1}=1.$$

$$a_n=n-1$$

隔项成等差，等比.

6. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=2n+1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

始终正确

未告诉等差/等比

错位相减

法一

$$\begin{cases} a_{n+2}+a_{n+1}=2n+3 \\ a_{n+1}+a_n=2n+1 \end{cases}$$

作差 $a_{n+2}-a_n=2$.

奇数项呈等差.

① 当n为奇 $a_n=a_1+\frac{n-1}{2}d=n$.

② 当n为偶数. [1] $a_n=2n+1-a_{n+1}$

$=2n+1-(n+1)=n$.

[2] $a_n=a_2+\frac{n-2}{2}d=2+n-2$

$=n$.

综上，$a_n=n$，$n\in N^*$.

法二

$a_{n+1}+a_n=(n+1)+n$.

$a_{n+1}-(n+1)=-a_n+n$.

$=-(a_n-n)$

首项 $a_1-1=0$.

7. (2016 山东) 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_n=b_n+b_{n+1}$.

(Ⅰ) 求数列$\{b_n\}$的通项公式；

与第6题区分

$\{a_n\}$: $d=6$.

$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2+8n-[3(n-1)^2+8(n-1)]$

$=6n+5\ (n\geq2)$.

又以 $a_1=S_1=11$ 适合上式

∴ $a_n=6n+5$.

∴ $b_n+b_{n+1}=6n+5$

以 $\{b_n\}$ 为等差. $\begin{cases} b_1+b_2=11 \\ b_2+b_3=17 \end{cases}$

$2d=6$ $d=3$.

$b_1=4$.

$b_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$$a_{n+1}a_{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}$$ 作比

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

当 n 为奇　$a_n=a_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}=1\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\frac{n-1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

当 n 为偶　$a_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{a_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

分段：
$$a_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & n\text{为奇}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & n\text{为偶}\end{cases}$$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n+a_{n+1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列结论中正确的是（AD）

A. $a_4=5$ ✓　　B. $\{a_n\}$ 为等比数列 ✗

C. $a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=2^{2022}-3$ ✗　　D. $a_1+a_2+\cdots+a_{2022}=\dfrac{2^{2023}-2}{3}$ ✓

$$\begin{cases}a_{n+1}+a_{n+2}=2^{n+1}\\ a_n+a_{n+1}=2^n\end{cases}$$

$a_{n+2}-a_n=2^n$

$a_1=1.\quad a_2=1.\quad a_3=3\quad a_4=5$

D: $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2021}+a_{2022})$

$=2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{2021}$

$=\dfrac{2(1-4^{1011})}{1-4}=\dfrac{2(2^{2022}-1)}{3}$ ✓

C: $a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2020}+a_{2021})$

$=1+2^2+2^4+\cdots+2^{2020}$

$=\dfrac{1(1-4^{1011})}{1-4}=\dfrac{2(2^{2022}-1)}{3}$

求 a_n 通项

$a_n+a_{n+1}=(2^n+2^{n+1})\times\frac{1}{3}$

$a_{n+1}-\dfrac{2^{n+1}}{3}=\dfrac{2^n}{3}-a_{n+1}$

$\left\{a_n-\frac{2^n}{3}\right\}$ 等比　$a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$　$q=-1$

$a_n-\frac{2^n}{3}=\frac{1}{3}\cdot(-1)^{n-1}$

$a_n=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$

3. $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(n+1)^2$ 求 a_n.

$$\begin{cases}a_{n+2}+a_{n+1}=(n+2)^2\\ a_{n+1}+a_n=(n+1)^2\end{cases}$$

$a_{n+2}-a_n=2n+3.$ → 二差为变数.

$n=1.\quad a_3=6.$

当 n 为奇.

$$\begin{cases}a_3-a_1=5\\ a_5-a_3=8.\\ a_7-a_5=13.\\ a_n-a_{n-2}=2n-1\end{cases}$$

隔项累加.

$2k-1=n-2.$ ⇓ $k=\frac{n-1}{2}$　项数.

$a_n-a_1=\dfrac{\frac{n-1}{2}(5+2n-1)}{2}=\dfrac{n^2+2-2}{2}$　$a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$

当 n 为偶

$a_n=(n+1)^2-a_{n+1}$

$=(n+1)^2-\dfrac{(n+1)^2+(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

a_n 和 S_n 关系式

$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (n \geq 2)$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

14. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$\frac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\frac{1}{3}n^2-n-\frac{2}{3}$，$(n\in N^*)$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$1^2+2^2+3^2+\cdots+$

法一 $\frac{2S_n}{n} = S_{n+1} - S_n - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$

消 a_{n+1}

$S_{n+1} = \frac{n+2}{n}S_n + \frac{n^2}{3} + n + \frac{2}{3}$

$= \frac{n+2}{n}S_n + \frac{(n+1)(n+2)}{3}$

$\frac{S_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{1}{3}$

$\left\{\frac{S_n}{n(n+1)}\right\}$ 为差 $\frac{S_1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$ $d = \frac{1}{3}$

$\frac{S_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{2n+1}{6}$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$= \frac{n[(2n+1)(n+1) - (n-1)(2n-1)]}{6} = n^2$

$a_1 = 1$

$a_n = n^2$

法二：消 S_n. 计算量大.